



گزینه ۳

۱

$$f = x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

باید نقطه خارج از دایره قرار بگیرد، یعنی $f(A) > 0$ باشد.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0 \xrightarrow{f(\alpha, -1) > 0} \alpha^2 + (-1)^2 - 2\alpha + 4(-1) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 > 0 \Rightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 1) > 0$$

$$\Rightarrow \alpha > 3 \text{ یا } \alpha < -1 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R} - [-1, 3]$$

گزینه ۲

۲

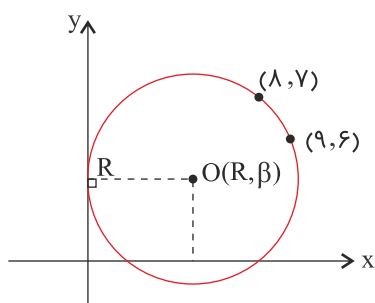
معادله گسترده دایره را $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ فرض کرده و مختصات نقاط داده شده را در آن جایگذاری می‌کنیم تا مقادیر a ، b و c به دست آیند:

$$\begin{cases} 4 + 1 + 2a + b + c = 0 \\ 1 + 4 + a + 2b + c = 0 \\ 9 + 0 - 3a + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b + c = -5 \\ a + 2b + c = -5 \\ -3a + c = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{دایره: } x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + 28}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{3}$$

مطابق شکل داریم:



$$O = (R, \beta) \Rightarrow \text{دایره} : (x - R)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$(8, 7) \in \text{دایره} \Rightarrow (8 - R)^2 + (7 - \beta)^2 = R^2$$

$$(9, 6) \in \text{دایره} \Rightarrow (9 - R)^2 + (6 - \beta)^2 = R^2$$

معادله دوم را از اولی کم می‌کنیم:

$$\Rightarrow (8 - R)^2 + (7 - \beta)^2 - (9 - R)^2 - (6 - \beta)^2 = 0$$

$$\Rightarrow R^2 - 16R + 64 + \beta^2 - 14\beta + 49 - (R^2 - 18R + 81) - (\beta^2 - 12\beta + 36) = 0$$

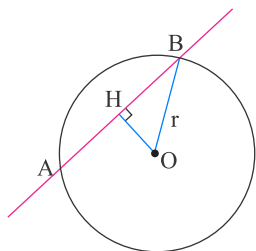
$$\Rightarrow 2R - 2\beta - 4 = 0 \Rightarrow R - \beta - 2 = 0 \Rightarrow \beta = R - 2$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x - R)^2 + (y - R + 2)^2 = R^2$$

$$\xrightarrow{(8, 7) \in \text{دایره}} (8 - R)^2 + (7 - R + 2)^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 16R + 64 + R^2 - 18R + 81 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 34R + 145 = 0 \Rightarrow (R - 5)(R - 29) = 0 \Rightarrow R = 5 \text{ یا } R = 29$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره کوچکتر} = 5$$



ابتدا فاصله مرکز دایره تا خط را به دست می‌آوریم:

$$O(3, 1) \quad 3x - 4y = 0$$

$$OH = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1$$

طول وتر برابر $2\sqrt{3}$ است، پس: $BH = \sqrt{3}$
 در مثلث $\triangle OBH$ رابطه فیثاغورس را می‌نویسیم تا شعاع به دست آید.

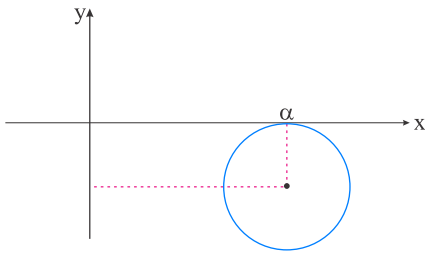
$$r^2 = OH^2 + BH^2 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow r = 2$$

ازطرفی:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 4m} \Rightarrow 4 = \sqrt{40 - 4m}$$

$$\Rightarrow m = 6$$

وقتی دایره‌ای به شعاع r بر محور x مماس باشد، آنگاه مرکز دایره $O(\alpha, \pm r)$ است. در اینجا چون مرکز در ناحیه چهارم است، $O(\alpha, -r)$ می‌باشد.



فاصله $O(\alpha, -r)$ را از خط مماس $4x + 3y = 0$ می‌یابیم و برابر شعاع یعنی $r = 2$ قرار می‌دهیم:

$$r = OH = \frac{|4\alpha + 3(-2)|}{\sqrt{(4)^2 + (3)^2}} = 2 \Rightarrow \frac{|4\alpha - 6|}{5} = 2$$

$$|4\alpha - 6| = 10 \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha - 6 = 10 \Rightarrow \alpha = 4 \text{ ق.ق} \\ 4\alpha - 6 = -10 \Rightarrow \alpha = -1 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

چون مرکز دایره در ناحیه چهارم است، طول آن باید مثبت باشد.

معادله $ax^2 + 2y^2 + 2ax + 6y - b = 0$ دایره است، در نتیجه باید ضریب x^2 با ضریب y^2 برابر باشد؛ پس داریم:

$$a = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x + 6y - b = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2x + 3y - \frac{b}{2} = 0$$

$$a' = 2, \quad b' = 3, \quad c' = \frac{-b}{2}$$

$$R = \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2 - 4c'}{4}} \Rightarrow \frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{\frac{4 + 9 + 2b}{4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13 + 2b} = \sqrt{19} \Rightarrow 13 + 2b = 19 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a + b = 5$$

ابتدا معادله دایره را می‌نویسیم:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 5$$

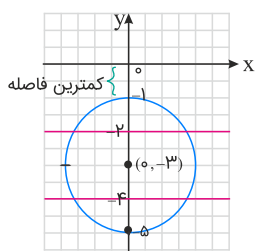
برای یافتن نقاط برخورد دایره با محور x ها، در معادله دایره به جای y عدد صفر را قرار می‌دهیم:

$$(x-1)^2 + (0+2)^2 = 5 \Rightarrow (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x-1 = \pm 1 \Rightarrow x = 0, 2$$

معادله دایره را استاندارد می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 - 9 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 + (y+3)^2 = 4$$

دایره‌ای به مرکز $(0, -3)$ و شعاع ۲ داریم. اگر $M(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره باشد، در این صورت $\sqrt{x^2 + y^2}$ فاصله این نقطه تا مبدأ مختصات است. کمترین مقدار $\sqrt{x^2 + y^2}$ برابر با کمترین فاصله نقاط روی دایره تا مبدأ مختصات می‌شود که باتوجه به شکل برابر با ۱ واحد است.

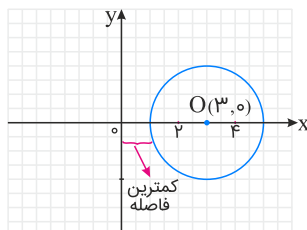


اول معادله دایره را استاندارد می‌کنیم.

$$x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + y^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O(3, 0), r = 2$$

نمودار مربوط به این دایره را رسم می‌کنیم:



اگر $M(x, y)$ نقطه‌ای روی دایره باشد، فاصله نقطه از مبدأ مختصات برابر $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ است، پس کمترین مقدار $x^2 + y^2$ برابر کمترین فاصله بین نقاط دایره تا مبدأ مختصات خواهد بود. باتوجه به شکل کمترین فاصله نقاط دایره تا مبدأ مختصات برابر ۱ واحد است.

شرط دایره بودن این است که ضرایب x^2 و y^2 باهم برابر باشند، پس:

$$m - 2 = 2 \Rightarrow m = 4$$

بنابراین باتوجه به $m = 4$ معادله دایره و خط به صورت زیر است:

$$2x^2 + 2y^2 + 4x - 4y - 4 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

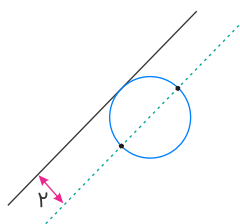
$$3x - 4y - 4 = 0$$

حال فاصله مرکز دایره از خط را به دست می آوریم:

$$O(-1, 2), \quad OH = \frac{|-3 - 8 - 4|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3$$

درنتیجه خط بر دایره مماس است و دو نقطه وجود دارد که به فاصله ۲ باشد.



$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow O(-2, 2), \quad R = \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 - 4y + k = 0 \Rightarrow O'(0, 2), \quad R' = \sqrt{\frac{64 - 4k}{4}} = \sqrt{16 - k}$$

$$d = OO' = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

دو دایره مماس داخل اند؛ بنابراین $d = |R - R'|$ ، پس داریم:

$$2\sqrt{2} = |\sqrt{16 - k} - 2\sqrt{2}| \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} = \sqrt{16 - k} - 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{16 - k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{16 - k} = 4\sqrt{2} \Rightarrow 16 - k = 32 \Rightarrow k = -16 & \text{ق.ق} \\ \sqrt{16 - k} = 0 \Rightarrow 16 - k = 0 \Rightarrow k = 16 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$k = 16$ غیرقابل قبول است، زیرا $R' = 0$ می شود.

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0 \Rightarrow O(1, -3) \quad , \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 36 + 24} = 4$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y - 5 = 0 \Rightarrow O'(-2, -4) \quad , \quad R' = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{16 + 64 + 20} = 5$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-3+4)^2} = \sqrt{10} \quad , \quad R + R' = 9 \quad , \quad |R - R'| = 1$$

$|R - R'| < OO' < R + R' \Rightarrow$ پس دو دایره متقاطع هستند

هرکدام از نقاط که مختصات آن در نابرابری $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 1 > 0$ صدق کنند، بیرون دایره قرار دارند. برای $(1, 4)$ این شرط برقرار است:

$$(1)^2 + (4)^2 + 4(1) - 4(4) + 1 > 0$$

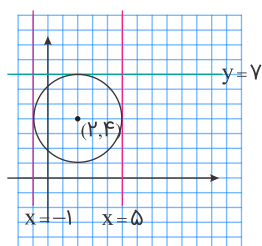
چون خط $l_2: x + 2y = 0$ بر دایره عمود است، مرکز دایره روی این خط قرار دارد، پس $O = (-2\beta, \beta)$. حال چون دایره بر خط l_1 مماس است و از نقطه A هم می‌گذرد، مرکز دایره از خط l و نقطه A به یک فاصله است و داریم:

$$|OA| = |OH| \Rightarrow \sqrt{(-2\beta - 1)^2 + (\beta - 2)^2} = \frac{|-2\beta - \beta - 1|}{\sqrt{1+1}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{5\beta^2 + 5} = \frac{|3\beta + 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow 5\beta^2 + 5 = \frac{9\beta^2 + 6\beta + 1}{2}$$

$$\Rightarrow 10\beta^2 + 10 = 9\beta^2 + 6\beta + 1 \Rightarrow \beta^2 - 6\beta + 9 = 0 \Rightarrow (\beta - 3)^2 = 0$$

$$\beta = 3 \xrightarrow{R=|OH|} R = \frac{|-6-3-1|}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$



باتوجه به اینکه $x = 5$ و $x = -1$ بر دایره مماس‌اند، پس قطر دایره برابر ۶ است.

$$2r = 6 \Rightarrow r = 3$$

اگر $x = 5$ بر دایره مماس و شعاع دایره برابر ۳ باشد، پس طول مرکز دایره برابر $5 - 3 = 2$ است. و چون بر خط $y = 7$ هم مماس شده است، عرض مرکز آن برابر $7 - 3 = 4$ می‌شود. پس معادله دایره به شکل $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ است. با قرار دادن $x = 4$ در معادله داریم:

$$(y - 4)^2 = 5 \Rightarrow y = 4 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \text{فاصله نقاط} = 2\sqrt{5}$$

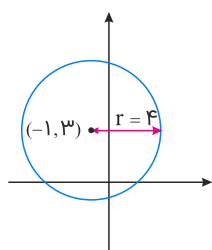
ابتدا مرکز و شعاع دایره را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$$

$$O\left(\frac{-2}{2}, \frac{+6}{2}\right) \Rightarrow O(-1, 3)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (-6)^2 - 4(-6)} = \frac{1}{2} \sqrt{64} = \frac{8}{2} = 4$$

درنتیجه دایره‌ای به مرکز $(-1, 3)$ و شعاع ۴ خواهیم داشت که از همه نواحی مختصاتی عبور می‌کند.



باتوجه به اینکه مرکز دایره $(۲, -a)$ است و بر محور y مماس است، پس:

$$r = ۲$$

$$r = \frac{1}{۲} \sqrt{(-۴)^۲ + (۲a)^۲} - ۴a = ۲ \Rightarrow ۱۶ + ۴a^۲ - ۴a = ۱۶$$

$$\Rightarrow ۴a(a - ۱) = ۰ \Rightarrow a = ۰ \text{ یا } a = ۱$$

چون $a > ۰$ است، پس $a = ۱$ قابل قبول است.

$$a = ۱ \Rightarrow x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y + ۱ = ۰ \Rightarrow O(۲, -۱)$$

اگر این دایره حول خط $y = -۱$ دوران کند، کره‌ای به شعاع ۲ حاصل می‌شود، که حجم آن برابر است با:

$$V = \frac{۴}{۳} \pi r^۳ = \frac{۴}{۳} \pi (۲)^۳ = \frac{۳۲\pi}{۳}$$

برای بررسی وضعیت دو دایره باید $R + R'$ و $|R - R'|$ و $d = OO'$ را یافته و باهم مقایسه کنیم؛ پس داریم:

$$x^۲ + y^۲ - ۳\sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲}y + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲}) \\ R = \sqrt{\frac{۱۸ + ۱۸ - ۲۰}{۴}} = ۲ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ = ۹ \Rightarrow O'(۰, ۰), R' = ۳$$

$$d = OO' = \sqrt{\left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲} = ۳$$

$$R + R' = ۳ + ۲ = ۵, |R - R'| = |۳ - ۲| = ۱$$

$$\Rightarrow |R - R'| < d < R + R'$$

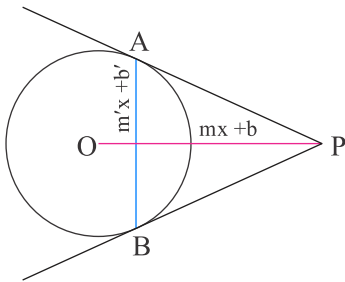
بنابراین دو دایره متقاطع هستند.

می‌دانیم خط AB بر PO عمود است، پس کافی است شیب PO را بیابیم:

$$C : (x - 3)^2 + y^2 = 16 \Rightarrow O(3, 0)$$

$$\Rightarrow m = \frac{0 - 16}{3 - 15} = \frac{4}{3}$$

$$mm' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{3}{4}$$



اولاً: در معادله دایره باید ضریب x^2 با ضریب y^2 برابر باشد، پس داریم:

$$(a - 3) = 2 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2x - 3y + b = 0$$

$$\xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + x - \frac{3}{2}y + \frac{b}{2} = 0$$

ثانیاً: در معادله ضمنی دایره به فرم $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$ باید $a'^2 + b'^2 - 4c' > 0$ باشد؛ پس داریم:

$$a' = 1, \quad b' = \frac{-3}{2}, \quad c' = \frac{b}{2}$$

$$a'^2 + b'^2 - 4c' > 0 \Rightarrow 1 + \frac{9}{4} - 4\left(\frac{b}{2}\right) > 0 \Rightarrow \frac{13}{4} > 2b \Rightarrow b < \frac{13}{8}$$

شرط اول برای دایره بودن، برابری ضرایب x^2 و y^2 است.

$$m^2 - 3 = -2m \Rightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}$$

حال در هر دو حالت باید چک شود که عبارت زیر رادیکال در فرمول شعاع دایره مثبت باشد. البته اول باید ضرایب x^2 و y^2 را به یک تبدیل کنیم.

$$۱) m = 1 \Rightarrow -2x^2 - 2y^2 + 4x - 2y - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 4 + 1 - 4 > 0 \quad \checkmark$$

$$۲) m = -3 \Rightarrow 6x^2 + 6y^2 + 4x - 2y + 6 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(6)} x^2 + y^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$$

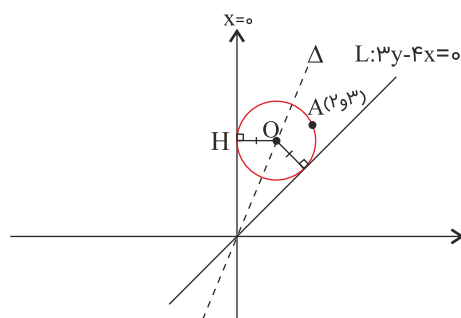
$$a^2 + b^2 - 4c = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} - 4 < 0 \quad \text{غ.ق.ق}$$

پس m یک مقدار، یعنی $m = 1$ است.

نکته: چون دایره بر دو خط متقاطع $L : -4x + 3y = 0$ و $L' : x = 0$ مماس است، مرکز آن روی نیمساز زاویه بین آنها قرار دارد.
پس ابتدا معادله نیمساز را می‌یابیم:

$$\frac{|-4x + 3y|}{\sqrt{16 + 9}} = |x| \Rightarrow |-4x + 3y| = 5|x| \Rightarrow \begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

حال باتوجه به مختصات نقطه A ، مرکز دایره باید روی خط $\Delta : -3x + y = 0$ قرار داشته باشد، پس $O(\alpha, 3\alpha)$ ، از طرف دیگر، چون دایره بر محور y مماس است، $R = \alpha$ و داریم:

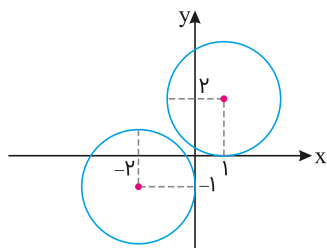


$$\text{دایره} : (x - \alpha)^2 + (y - 3\alpha)^2 = \alpha^2$$

$$\xrightarrow{(2, 3) \in \text{دایره}} (2 - \alpha)^2 + (3 - 3\alpha)^2 = \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 + 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = \alpha^2$$

$$\Rightarrow 9\alpha^2 - 22\alpha + 13 = 0 \Rightarrow \alpha = 1 \text{ یا } \alpha = \frac{13}{9} \Rightarrow R = 1 \text{ یا } R = \frac{13}{9}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع دایره بزرگتر} = \frac{13}{9}$$



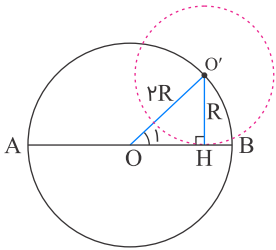
$$O_1(1, 2), r_1 = 2$$

$$O_2(-2, -1), r_2 = \sqrt{4 + 1 + 1} = 2$$

$$\text{طول خط الممرکزین: } O_1O_2 = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \sim 4/2$$

دو دایره متخارج هستند. $O_1O_2 > r_1 + r_2 \Rightarrow$

شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

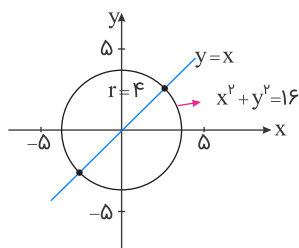


باتوجه به اینکه دایره کوچک‌تر در نقطه H بر قطر AB مماس است، پس $\hat{H} = 90^\circ$.
در مثلث $\triangle OO'H$ داریم:

$$\begin{aligned}\frac{O'H}{OO'} &= \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 = 30^\circ \\ \Rightarrow O'B &= 30^\circ \Rightarrow O'A = 150^\circ \\ \frac{O'B}{O'A} &= \frac{30^\circ}{150^\circ} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

وتری که خط $x = y$ روی دایره‌ای به مرکز $(0, 0)$ را جدا می‌کند، برابر قطر دایره است:

$$2r = 8 \Rightarrow r = 4$$



حالا معادله دایره‌ای به شعاع ۴ و مرکز $(0, 0)$ را می‌نویسیم:

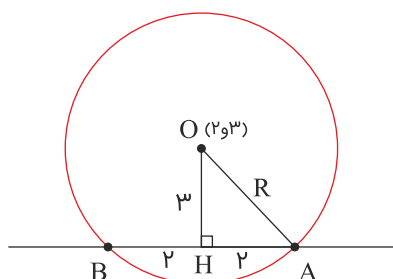
$$x^2 + y^2 = 16$$

فقط گزینه (۲) در معادله دایره صدق می‌کند.

باید معادله خطی را بنویسیم که از مرکز دایره موردنظر گذشته و بر خط داده‌شده عمود باشد. شیب خط $x + 2y - 1 = 0$ برابر $-\frac{1}{2}$ است، پس شیب قطر عمود بر این خط برابر ۲ می‌باشد. همچنین مرکز دایره نقطه $O(1, -2)$ است. بنابراین داریم:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y + 2 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 4$$

از مرکز دایره بر خط l عمود می‌کنیم. مطابق شکل، داریم:



$$|OH| = \frac{|\lambda(2) + 15(3) - 10|}{\sqrt{\lambda^2 + 15^2}} = \frac{51}{17} = 3$$

$$R^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$\Rightarrow \text{دایره} : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$$

برای یافتن محل برخورد دایره با محور y ها، مقدار x را در معادله دایره، برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(0 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13 \Rightarrow (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow y - 3 = \pm 3 \Rightarrow y_1 = 6, \quad y_2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{طول وتر حاصل} = 6 : (0, 6), (0, 0)$$

شعاع دایره برابر است با:

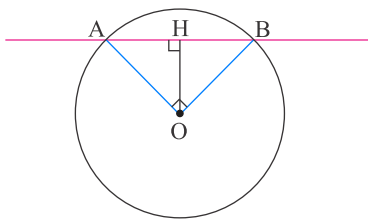
$$x^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 + 20} = \frac{5}{2}$$

پس نقطه موردنظر باید روی دایره قرار بگیرد تا از مرکز به فاصله $5/2$ باشد.

جایگذاری گزینه ۳:

$$3^2 + (-1)^2 - 3 + 2(-1) - 5 = 9 + 1 - 3 - 2 - 5 = 0$$



در مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین OAB داریم: $r = OA = \sqrt{2}OH$
پس ابتدا مرکز دایره را می‌یابیم:

$$O(-3, 1)$$

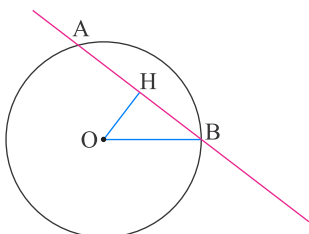
$$OH = \frac{|-15 - 12 + 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{26}{13} = 2 \Rightarrow r = 2\sqrt{2}$$

باتوجه به معادله دایره، شعاع برابر است با:

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 4k} = \frac{1}{2} \sqrt{40 - 4k} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 40 - 4k = 32 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

مطابق شکل، فاصله مرکز تا خط را به دست می‌آوریم و سپس در مثلث OHB از فیثاغورس استفاده می‌کنیم.



$$OH = \frac{|5(1) + 12(1) - 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 1$$

$$\text{از طرفی: } HB = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

$$OB^2 = OH^2 + HB^2 \Rightarrow OB = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 10y - 7 = 0$$

$$\Rightarrow O(-2, 5), R = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 100 + 28} = \frac{1}{2} \sqrt{144} = 6$$

چون دایره مطلوب با دایره داده شده مماس خارج هستند، پس باید شرط $OO' = R + R'$ برقرار باشد. بنابراین داریم:

$$O'(\epsilon, -1), O(-2, 5)$$

$$\Rightarrow OO' = \sqrt{(\epsilon + 2)^2 + (-1 - 5)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$$OO' = R + R' \Rightarrow 10 = 6 + R' \Rightarrow R' = 4$$

$$\Rightarrow \text{معادله دایره مطلوب: } (x - \epsilon)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 12x + 2y + 21 = 0$$

شعاع و مرکز هر دو دایره را به دست می‌آوریم و باتوجه به طول خط‌المركزین و طول شعاع‌ها، وضعیت دو دایره را مشخص می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y = 20 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 - 4 - 1 = 20$$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 25 \Rightarrow O_1(-2, -1), R_1 = 5$$

$$2x^2 + 2y^2 + 12x - 4y = -12 \xrightarrow{\div 2} x^2 + y^2 + 6x - 2y = -6$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 - 9 - 1 = -6 \Rightarrow (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

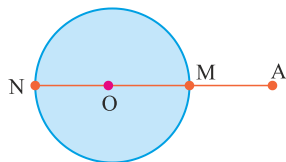
$$\Rightarrow O_2(-3, 1), R_2 = 2$$

$$d = O_1O_2 = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

حال باتوجه به اینکه $d < |R_1 - R_2|$ ($\sqrt{5} < 3$)، بنابراین دو دایره متداخل هستند.

نکته: مطابق شکل کمترین فاصله نقطه A از دایره برابر با AM و بیشترین فاصله نقطه A از دایره برابر با AN است که از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$AM = |AO - R|, \quad AN = AO + R$$



طبق نکته فوق داریم:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0 \Rightarrow O(3, 2), \quad R = \sqrt{\frac{36 + 16 - 36}{4}} = 2$$

$$|OA| = \sqrt{(3+1)^2 + (2-5)^2} = 5$$

$$\text{کمترین فاصله} = AM = |OA - R| = 5 - 2 = 3$$